Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»

Инженерно-физический факультет высоких технологий

Щиголев В.К.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения

Ульяновск, 2019

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Методы математической физики» / составитель: В. К. Щиголев. - Ульяновск: УлГУ, 2019.

Настоящие методические указания предназначены для студентов 2 курса инженерно-физического факультета высоких технологий всех форм обучения, изучающих дисциплину «Методы математической физики». В работе приведены литература по дисциплине, основные темы курса и вопросы в рамках каждой темы, рекомендации по изучению теоретического материала, контрольные вопросы для самоконтроля. Студентам очной формы обучения они будут полезны при подготовке к практическим занятиям и к экзамену по данной дисциплине.

Рекомендованы к введению в образовательный процесс Ученым советом Инженерно-физического факультета высоких технологий УлГУ (протокол № 11 от 18 июня 2019 г.)..).

Оглавление

Литература для изучения дисциплины

1. Тихонов А.Н, Самарский А.А.. Уравнения математической физики.-6-е издание. - М., Изд-во Моск. ун-та, 1999.-- 798 с.
2. А.Ф.Никифоров, В.Б.Уваров. Специальные функции математической физики. Наука, М., 1984
3. Будак Б.М., Самарский А.А. , Тихонов А.Н. . Сборник задач по математической физике. – 4-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2004. – 688 с.: ил.
4. Сборник задач по уравнениям математической физики.// под редакцией В.С.Владимирова. Наука, М., 1974
5. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. — М.: Физматлит, 2005.

Тема 1. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка

Основные вопросы темы:

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка.
2. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными.
3. Приведение дифференциальных уравнений в частых производных второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфе 1 главы 1 учебника [1].

Задачи к теме приведены в параграфах 1, 2 главы 1 задачника [3] и в параграфе 2 главы 1 в задачнике [4] .

Тема 2. Уравнения гиперболического типа

Основные вопросы темы:

1. Уравнение колебаний на бесконечной прямой.
2. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера.
3. Уравнение колебаний на полубесконечной прямой. Метод продолжения.
4. Задача Коши для уравнения колебаний в пространстве. Формула Пуассона.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 1, 2 главы 2 учебника [1].

Задачи к теме приведены в параграфах 1, 2 главы 2 задачника [3] и в параграфе 12 главы 4 в задачнике [4] .

Тема 3. Метод разделения переменных

Основные вопросы темы:

1. Метод разделения переменных (метод Фурье).
2. Решение начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения методом разделения переменных
3. Общая схема решения начально-краевой задачи для неоднородного волнового уравнения методом разделения переменных

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфе 3 главы 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфах 3 главы 2 задачника [3] и в параграфе 20 главы 6 в задачнике [4].

Тема 4. Уравнения параболического типа

Основные вопросы темы:

1. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности.
2. Задача Коши для одномерного однородного уравнения теплопроводности.
3. Задача Коши для одномерного неоднородного уравнения теплопроводности

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфе 1 главы 3 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 2 главы 3 задачника [3] и в параграфе 12 главы 4 в задачнике [4].

Тема 5. Начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

Основные вопросы темы:

1. Общая схема решения начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности.
2. Общая схема решения начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности.
3. Функция влияния мгновенного точечного источника тепла.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфе 2 главы 3 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 2 главы 3 задачника [3] и в параграфе 20 главы 6 в задачнике [4].

Тема 6. Задачи для уравнения теплопроводности на бесконечной прямой

Основные вопросы темы:

1. Распространение тепла на бесконечной прямой.
2. Функция источника для неограниченной области.
3. Краевые задачи для полупрямой.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 3 главы 3 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 3 главы 3 задачника [3].

Тема 7. Уравнения эллиптического типа

Основные вопросы темы:

4. Краевые задачи для уравнения Лапласа.
5. Гармонические функции. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
6. Решение уравнения Лапласа в прямоугольнике
7. Краевые задачи в круге, вне круга и в кольце, в шаре, вне шара и в шаровом слое

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 1, 2 главы 4 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфах 2,3 главы 4 задачника [3] и в параграфе 16 главы 5 в задачнике [4].

Тема 8. Функция Грина

Основные вопросы темы:

1. Формулы Грина.
2. Основные свойства гармонических функций (теорема Гаусса, теорема о среднем, бесконечная дифференцируемость, принцип максимума).
3. Функция Грина для оператора Лапласа. Методы ее построения.
4. Гармонические потенциалы: объемный потенциал, поверхностные и логарифмические потенциалы.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 3- 5 главы 4 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфах 4,5 главы 4 задачника [3] и в параграфах 17, 18 главы 5 в задачнике [4].

Тема 9. Цилиндрические функции

Основные вопросы темы:

1. Уравнение Бесселя. Степенной ряд для функции Бесселя.
2. Рекуррентные формулы для функций Бесселя.
3. Интегральное представление функции Бесселя.
4. Функции Бессели полуцелого порядка.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 1, 2 части 1 дополнения 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфах 14, 15 главы 3 монографии [2].

Тема 10. Интегралы, содержащие функции Бесселя

Основные вопросы темы:

1. Функции Ханкеля и функция Неймана. Функции Ханкеля и Неймана.
2. Функции Ханкеля и Неймана целого и полуцелого порядка.
3. Цилиндрические функции мнимого аргумента. Интегралы вида $\int_0^\infty e^{-z\lambda} J_0(\rho\lambda)d\lambda$ и $\int_0^\infty J_\nu(\rho\lambda)e^{-t\lambda^2}\lambda^{\nu+1}d\lambda$

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфах 3-5 части 1 дополнения 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфах 25 главы 5 монографии [2].

Тема 11. Классические ортогональные полиномы

Основные вопросы темы:
1. Определение классических ортогональных полиномов (КОП).
2. Дифференциальное уравнение для КОП. Формула Родрига.
3. Дифференциальные уравнения и формула Родрига для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита.
4. Квадрат нормы КОП. Производящие функции для КОП.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 3 главы 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 7 главы 2 монографии [2].

Тема 12. Полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита

Основные вопросы темы:
1. Дифференциальные уравнения и формула Родрига для полиномов Якоби, Лагерра и Эрмита.
2. Производящая функция для полиномов Лежандра.
3. Производящие функции для полиномов Лагерра и Эрмита.
4. Вывод рекуррентных формул для полиномов Лежандра с помощью производящей функции.
5. Квадрат нормы полиномов Лежандра.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 4 главы 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 5 часть 1 дополнения в учебнике [1].

Тема 13. Присоединенные функции Лежандра и сферические функции

Основные вопросы темы:

1. Присоединенные функции Лежанра.
2. Норма присоединенных Функций Лежанра.
3. Сферические функции. Ортогональность системы сферических функций.
4. Свойства сферических функций и задача Дирихле для сферы.

.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 4 главы 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 10 главы 2 монографии [2].

Тема 14. Дельта - функция

Основные вопросы темы:

1. Определение дельта - функции.
2. Разложение дельта – функции в ряд Фурье.
3. Применение дельта – функции к построению функции источника.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в разделе 6 приложения к главе 3 учебника [1].
Задачи к теме приведены в дополнении 3 задачника [3].

Тема 15. Некоторые применения специальных функций

Основные вопросы темы:

1. Проводящая сфера в поле точечного заряда.
2. Квантовый гармонический осциллятор.
3. Квантовый ротатор.
4. Атом водорода.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 3 части 3 дополнения 2 учебника [1].
Задачи к теме приведены в параграфе 26 главы 5 монографии [2].

Тема 16. Нелинейные уравнения математической физики

Основные вопросы темы:

1. Модели физических процессов, приводящих к нелинейным уравнениям.
2. Методы теории возмущений решения нелинейных задач математической физики.

Рекомендации по изучению темы:

Вопрос изложен в параграфах 2.1-2.3 учебника [5].
Задачи к теме приведены в разделе 3 дополнения в задачнике [3].

Тема 17. Преобразования Беклунда

Основные вопросы темы:

1. Преобразования Беклунда для уравнений второго порядка.
2. Преобразования Беклунда, основанные на законах сохранения.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 2.4 учебника [5].
Задачи к теме приведены в примерах параграфа 7 главы 2 учебника [1].

Тема 18. Метод обратной задачи рассеяния (теория солитонов)

Основные вопросы темы:

1. Описание метода обратной задачи рассеяния.
2. Представление Лакса для нелинейных уравнений.
3. Преобразование Дарбу для нелинейных уравнений.
4. Уединенные волны и солитоны.

Рекомендации по изучению темы:
Вопрос изложен в параграфе 11 учебника [5].
Задачи к теме приведены в примерах параграфа 11.2.2 учебника [5].

Приложение 1. Задачи для самоконтроля

1. Решить задачу о колебаниях однородной струны $(0 \prec x \prec l)$, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = l,$ под действием внешней непрерывно распределенной силы с плотностью $f(x,t) = A\cos\omega t,\quad \omega \neq \dfrac{k\pi a}{l}\quad (k = 1,2,...).$ Начальные условия – нулевые.
2. Привести к каноническому виду уравнение $x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$
3. Найти форму струны, определяемой уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t = \dfrac{\pi}{2a}$, если $u\big|_{t=0} = \sin x,\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 1.$
4. Для $0 \le x \le 2$ и $t \ge 0$ найти решение уравнения $u_t = u_{xx} + \sin\dfrac{\pi x}{4},$ удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = 0$ и граничным условиям $u(0,t) = 0$ и $u_x(2,t) = 0$

5. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0} = 0$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = x$.

6. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0} = \cos x.$

7. Привести к каноническому виду уравнение $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} + (2 - \cos^2 x) u_{yy} = 0$.

8. Решить методом разделения переменных следующую задачу:

$$u_{tt} = u_{xx} + \sin t \quad (0 \prec x \prec \pi), \quad u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0, \quad u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0.$$

9. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0} = \sin x.$

10. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0} = 1 - x.$

11. Найти форму струны, определяемой уравнением $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в момент $t = \pi$, если $u\big|_{t=0} = \sin x,$ $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \cos x.$

12. Решить методом разделения переменных следующую задачу:

$$u_{tt} = 16u_{xx}; \quad (0 \prec x \prec 1), \quad u\big|_{x=0} = t, \quad u\big|_{x=1} = 0, \quad u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 1 - x.$$

13. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0} = x^2$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \sin x$.

14. Дан тонкий однородный стержень $0 \prec x \prec \dfrac{\pi}{2}$, боковая поверхность которого теплоизолирована. Найти распределение температуры $u(x,t)$ в стержне, если:

$$u_t = u_{xx} + \sin 2x, \qquad 0 \prec x \prec \frac{\pi}{2}, \qquad u\Big|_{x=0} = u\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = u\big|_{t=0} = 0.$$

15. Найти решение уравнения $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если $u\big|_{t=0} = e^x \sin \pi x$.

Приложение 2. Пример завершающего теоретического теста

Правильные варианты ответов отмечены «звездочкой».

<u>Вопрос 1</u>: Для того, чтобы уравнение $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ принадлежало к параболическому типу необходимо, чтобы

Варианты ответов:

*(1) a_{12} = 0

(2) a_{11} ☹ 0

(3) a_{12} ✸ 0

(4) a_{11} = 0

Вопрос 2: В методе разделения переменных, то есть представлении функции $u(x,t) = X(x)T(t)$, задача Штурма-Лиувилля для уравнения $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ с граничными условиями $X'(0) = X(l) = 0$ приводит к собственным значениям константы разделения и соответствующим собственным функциям вида

Варианты ответов:

1) $\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

2) $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}, \quad (n = 1, 2, \dots)$

*3) $\lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l}, \quad X_n(x) = \cos\frac{\pi(2n+1)x}{2l}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$

4) $\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad X_n(x) = \cos\frac{\pi n x}{l}, \quad (n = 1, 2, \dots)$

Вопрос 3: Задача Коши для уравнения свободных колебаний бесконечной струны $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ с начальными условиями $u(x,0) = e^x$, $u_t(x,0) = 0$ имеет решение

Варианты ответов:

1) $e^x sh(at)$

*2) $e^x ch(at)$

3) $e^x sin(at)$

4) $e^{-x} ch(at)$

Вопрос 4: Для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ относительно температуры $u(x,t)$ вдоль стержня длиной l, то есть для $0 < x < l$, $t > 0$, граничное условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{|x=0} = 0$$

означает, что на левом конце стержня

Варианты ответов:

1) поддерживается нулевая температура

2) осуществляется свободный теплообмен с окружающей средой

*3) нет теплообмена с окружающей средой

4) принудительно обеспечен ненулевой поток тепла в стержень

Вопрос 5: Почему функцию источника

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$$

иначе называют фундаментальным решением уравнения теплопроводности? Потому что она

Варианты ответов:

1) удовлетворяет уравнению $u_{tt}=a^2u_{xx}$ и определяет общее решение задачи Коши

2) удовлетворяет общему неоднородному уравнению теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}+f(x,t)$

*3) удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t=a^2u_{xx}$ и определяет общее решение задачи Коши

4) удовлетворяет общему неоднородному уравнению колебаний $u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t)$

<u>**Вопрос 6**</u>: Интеграл Пуассона

$$u(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\alpha)\frac{R_0^2-\rho^2}{\rho^2-2\rho R_0\cos(\varphi-\alpha)+R_0^2}d\alpha$$

с граничным условием $u(R_0,\varphi)=f(\varphi)$ дает решение для круга методом разделения переменных

Варианты ответов:

1) второй краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u=F$

*2) первой краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u=0$

3) первой краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta u=F$

4) второй краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta u=0$

<u>**Вопрос 7**</u>: Общее решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{0,25}{x^2}\right)y=0$$

может быть записано как

Варианты ответов:

1) $y=x^2\left(C_1e^{x^2}+C_2x+1\right)$, где e – экспонента

*2) $y=C_1J_{\frac{1}{2}}(x)+C_2J_{-\frac{1}{2}}(x)$, где $J_\nu(x)$ – функция Бесселя порядка ν

3) $y=C_1P_2(x)+C_2P_1(x)$, где $P_n(x)$ – полином Лежандра степени n

4) $y=C_1\sin(x)+C_2\cos(x)$, где $\sin,\cos$ – тригонометрические функции

Вопрос 8: Для каких классических ортогональных полиномов формула Родрига записывается в виде

$$p_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right),$$

а квадрат нормы равен

$$2^n n! \sqrt{\pi}$$

Варианты ответов:

1) для полиномов Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$

2) для полиномов Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$

*3) для полиномов Эрмита $H_n(x)$

4) для полиномов Лежандра $P_n(x)$

Вопрос 9: Полиномы Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяют следующему уравнению на соответствующем интервале:

Варианты ответов:

*1) $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

2) $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

3) $xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$

4) $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

Вопрос 10: Сферическая гармоника $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi)$ может быть записана с точностью до нормировки через присоединенной функции Лежандра $P_l^{(m)}(x)$ следующим образом

Варианты ответов:

1) $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi) = P_l^{(m)}(\sin\theta)\sin(m\varphi)$

*2) $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)\sin(m\varphi)$

3) $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi) = P_l^{(m)}(\sin\theta)\cos(m\varphi)$

4) $Y_l^{(m)}(\theta,\varphi) = P_l^{(m)}(\cos\theta)\cos(m\varphi)$